МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
РОЗРАХУНКОВІ РОБОТИ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 124 «Системний аналіз»,*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рівняння математичної фізики: Розрахункові роботи [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Г.Бондаренко . – Електронні текстові дані (1 файл: 438 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 23 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9 від30 травня 2019р.)
за поданням Вченої ради ІПСА (протокол № 5 від 24 травня 2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
РОЗРАХУНКОВІ РОБОТИ

Укладач: *Бондаренко Віктор Григорович,* доктор фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний редактор *Богданський Ю. В.,* доктор фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент: *Дудкін М.Є.* доктор фіз.-мат. наук, проф.

Посібник містить задачі для розрахункових робіт по основних розділах дисципліни «Рівняння математичної фізики» – крайові задачі для еліптичних рівнянь, задача Коші та змішані задачі для еволюційних рівнянь. Кожен розділ містить методичні вказівки із прикладами розв’язання.

Для студентів математичних і технічних спеціальностей університетів

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета даної розрахункової роботи — навчити студентів розв'язувати стандартні задачи рівнянь математичної фізики, здобути навички побудови розв'язку даної задачі з елементарних розв'язків.

Задачі, що містяться в даній розрахунково-графічній роботі (РГР), охоплюють такі теми[1].

1. Метод поділу змінних розв'язування задачі Діріхле і Неймана в колі, зовні кола та в кільці— (завдання 1, 2, 3, 4).

2. Розв'язування задачі Коші для одновимірного рівняння дифузії (теплопровідності)— (завдання 5).

3. Розв'язування дво- та тривимірної задачі Діріхле методами функції Гріна і поділу змінних (завдання 6).

4. Розв'язування граничної задачі для рівняння коливання струни на півосі (завдання 7).

5. Розв'язування задачі Коші для дво- та тривимірного рівняння коливань (завдання 8, 9).

[1] Задачі цієї розрахунково-графічної роботи (РГР) частково містять матеріал посібника:: Тевяшев А.Д. Вибрані глави математичної фізики у прикладах та задачах: [навч. посібник] / Тевяшев А.Д., Колосова С.В., Сидоров М.В. — Харківський національний університет радіоелектроніки, 2007).

1. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Навести схему методу поділу змінних розв'язку задачі Діріхле для областей з круговою симетрією.

2. Довести формулу розв'язку задачі Коші для одновимірного неоднорідного рівняння дифузії (теплопровідності). Дати ймовірнісну трактовку формули.

3. Навести визначення функції Гріна задачі Діріхле. Перелічити методи побудови функції Гріна для областей простої структури.

4. Навести схему розв'язання граничних задач на півосі для одновимірних еволюційних рівняннь.

5. Довести формули Кірхгофа та Пуассона розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2.1. Метод поділу змінних розв'язку задачі Діріхле для області з круговою симетрією

Цей метод грунтується на твердженні: *Функції* $\ln\rho$, $\rho^n\cos n\varphi$,$\rho^n\sin n\varphi$ *для будь якого цілого* n *задовольняють рівняння Лапласа* $\Delta u = 0$ *(в полярних координатах)*.

Приклад 2.1.1. Розв'язати задачу Діріхле в кільці $\Delta u(\rho,\varphi) = 0$, $1 < \rho < 2$; $u(1,\varphi) = sin\varphi - cos\varphi$, $u(2,\varphi) = cos^2\varphi$.

Розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$u(\rho,\psi) = A + B\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(c_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}(E_n\cos n\varphi + F_n\sin n\varphi).$$

Шукаємо коефіцієнти розкладу, використовуючи граничні умови.

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}((C_n + E_n)\cos n\varphi + (D_n + F_n)\sin n\varphi) = \sin\varphi - cos\varphi$$

$$A + Bln2 + \sum_{n=1}^{\infty}((2^nC_n + 2^{-n}E_n)\cos n\varphi + (2^nD_n + 2^{-n}F_n)\sin n\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi.$$

Такі тотожності виконуються, якщо

$A = 0, B = \frac{1}{2ln2}$;$C_1 + E_1 = -1$;$D_1 + F_1 = 1$;$4C_2 + \frac{E_2}{4} = \frac{1}{2}$;

$C_n + E_n = D_n + F_n = 0$,$n \geq 2$;$2^nC_n + 2^{-n}E_n = 0, n \neq 2$; $2^nD_n + 2^{-n}F_n = 0$, $n \geq 1$.

Розв'язок наведеної системи має вигляд:

$C_1 = \frac{1}{3}$,$E_1 = -\frac{4}{3}$, $D_1 = -\frac{1}{3}$, $F_1 = \frac{4}{3}$, $C_2 = \frac{2}{15}$, $E_2 = -\frac{2}{15}$.

Всі інші коефіцієнти є нульовими.

Відповідь:

$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2ln2}ln\rho+\frac{\rho}{3}(cos\varphi-sin\varphi)+\frac{4}{3\rho}(-cos\varphi+sin\varphi)+\frac{2}{15}\rho^2\cos 2\varphi-\frac{2}{15\rho^2}cos\,2\varphi$.

2.2. Задача Коші для одновимірного рівняння дифузії

Знайти функцію $u(t,x), t>0, x\in R$, що задовольняє рівнянню $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)$ та початковій умові $u(0,x)=\varphi(x)$.

Розв'язок дається формулою:

$$u(t,x)=\mathrm{E}\varphi(\xi)+\int_0^t \mathrm{E}f(s,\eta)ds$$

де E—символ математичного сподівання, ξ та η—гауссівські випадкові величини, $\xi\sim\aleph(x,2a^2t)$, $\eta\sim\aleph\big(x,2a^2(t-s)\big)$.

Приклад 2.2.1. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+tx^2, t>0, x\in R, u(0,x)=cos2x.$$

За наведеною формулою, $u(t,x)=\mathrm{E}cos2\xi+\int_0^t s\mathrm{E}\eta^2ds$.

Обчислимо математичні сподівання, використовуючи відому формулу для характеристичної функції $\chi(z)$ гауссівського розподілу.

$$\mathrm{E}cos2\xi=Re\chi(2)=e^{-4t}cos2x;\quad \mathrm{E}\eta^2=x^2+2(t-s).$$

Відповідь: $u(t,x)=e^{-4t}cos2x+\frac{1}{2}t^2x^2+\frac{1}{3}t^3$.

Якщо початкова умова є квадратичною експонентою, тобто

$$\varphi(x)=exp\{-ax^2+bx\}, a>0,$$

то для обчислення математичного сподівання

$$\mathrm{E}exp\{-a\xi^2+b\xi\}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-ay^2+by-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right\}dy$$

в показнику експоненти слід виділити повний квадрат і скористатися відомим інтегралом Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\alpha z^2\}dz=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,.$$

2.3. Розв’язок задачі Діріхле для модельних областей

Розв’язування задачі Діріхлє передбачається методом поділу змінних або методом функції Гріна.

Функція Гріна задачі Діріхлє визначається формулами:

для тривимірної області $D \subset R^3$

$G(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = \frac{1}{4\pi r(M_0,M)} + v(M_0, M)$;

для двовимірної області $D \subset R^3$

$G(x_0, y_0, x, y) = -\frac{1}{2\pi} ln\rho(M_0, M) + v(x_0, y_0, x, y)$,

де $M_0 \in D$, а функція v гармонічна за змінними (x, y, z) і така, що $G = 0$ на межі області П.

Якщо функція Гріна відома, то розв’язок задачі Діріхлє

$$\Delta u = 0 \text{ в } D; \quad u|_{\Pi} = f$$

можна записати формулою

$$u(M_0) = -\oiint_{\Pi} \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M) f(M) d\sigma$$

де диференціювання G під знаком інтеграла відбувається за змінними (x, y, z) , тобто

$$\frac{\partial G}{\partial n} = (\boldsymbol{grad}_M G(M_0, M), \boldsymbol{n}),$$

$M \in$ П, $\boldsymbol{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні (кривої) П.

Для півпростору $\{z > 0\}$ функція Гріна

$$G(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right).$$

У цьому випадку

$$-\frac{\partial G}{\partial n}|_{\Pi} = \frac{\partial G}{\partial z}|_{z=0} = \frac{z_0}{2\pi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

і розв'язок граничної задачі задається формулою

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy \,.$$

Аналогічно доводиться формула розв'язку задачі Діріхлє для верхньої півплощини $\Delta u(x, y) = 0,\ y > 0;\quad u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

Для побудови функції Гріна на площині в деяких випадках можна застосувати апарат теорії функцій комплексної змінної. Позначимо:

C –комплексна площина, область

$$D \subset C, z \in C, \varsigma \in C,\ z = x + iy, \varsigma = \xi + i\eta;$$

$w_\varsigma(z)$ —конформне відображення області D на одиничний круг $|w| < 1,\ \ w_\varsigma(\varsigma) = 0$, тобто точка ς переходить в центр кола. Функція Гріна $G(z, \varsigma)$ задачі Діріхлє для області D визначається формулою:

$$G(z, \varsigma) = -\frac{1}{2\pi} ln\left|w_\varsigma(z)\right| .$$

Так, для смуги $0 < y < \pi$ $\quad w_\varsigma(z) = \frac{e^z - e^\varsigma}{e^z - \overline{e^\varsigma}}$, і функція Гріна

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi}\ ln\frac{ch(x-\xi)-cos(\eta+y)}{ch(x-\xi)-cos(\eta-y)} .$$

Розв'язок відповідної задачі Діріхлє

$$\Delta u = 0, x \in R, 0 < y < \pi;\ \ u(x, 0) = f(x),\ \ u(x, \pi) = g(x)$$

має вигляд:

$$u(x, y) = \frac{siny}{2\pi}\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{ch(x-\xi)-cosy} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)d\xi}{ch(x-\xi)+cosy}\right).$$

Приклад 2.3.1. Знайти функцію $u(x, y, z)$таку, що

$\Delta u = e^{-z} \sin x cos\, y, z > 0; u(x, y, 0) = 0.$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$u(x, y, z) = f(z) \sin x \cos y, f(0) = 0;$

Підстановка в рівняння дає співвідношення:

$f''(z) - 2f(z) = e^{-z},$

звідки

$f(z) = e^{-z\sqrt{2}} - e^{-z}.$

Відповідь: $u(x, y, z) = \left(e^{-z\sqrt{2}} - e^{-z}\right) \sin x cos\, y.$

Приклад 2.3.2. Знайти функцію $u(x, y)$ таку, що

$\Delta u = 0, y > 0$,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, x > 1 \\ 0, x \le 1 \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу за допомогою функції Гріна задачі Діріхле. Остання будується методом електростатичних зображень і має вигляд:

$$G(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{4\pi}(\ln(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2) - \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2).$$

Тоді розв'язок задачі Діріхле

$$u(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, x, 0) u(x, 0)\, dx = \frac{y_0}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctg \frac{1 - x}{y}.$$

Відповідь: $u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctg \frac{1 - x}{y}.$

2.4. Гранична задача для рівняння коливання струни на півосі

Знайти функцію $u(t,x), t>0, x>0,$ що задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і умов: початкових $u(0,x)=\varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x)$ та одній з крайових умов: $u(t,0)=0$ або $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0$.

Приклад 2.4.1. Знайти розв'язок граничної задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x)=-\frac{x^2}{2},\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=x-sinx,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0.$$

Ця гранична задача зводиться до задачі Коші на всій осі подовженням початкових умов для $\mathrm{x}<0$ як парних функцій. Якщо позначити

$$-\frac{x^2}{2}=\varphi(x),\ x-\sin x=\psi(x)\ ,$$

тоді

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(y)\,dy\ \ , x\geq at\ ,$$

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}\varphi(y)\,dy+\int_0^{at-x}\varphi(y)\,dy\right), x<at.$$

У результаті отримуємо:

$$u(t,x)=-\frac{x^2+a^2t^2}{2}+tx-\frac{1}{a}\sin x\sin at,\ x\geq at;$$

$$u(t,x)=-\frac{x^2+a^2t^2}{2}+\frac{x^2+a^2t^2}{2a}+\frac{1}{a}\cos at\cos x-\frac{1}{a},\ 0<x<at.$$

Зауваження. Парне подовження початкових умов на всю вісь можливе, якщо $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$. Задача з крайовою умовою $u(t,0)=0$ розв'язується подовженням початкових умов на всю вісь непарним чином, якщо $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ задовольняють умов: $\varphi(0)=\psi(0)=\varphi''(0)=0$.

2.5. Розв'язок задачі Коші для дво- і тривимірного рівняння коливань

Розв'язок задачі Коші для дво- і тривимірного рівняння коливань

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

зводиться до обчислення подвійних інтегралів. Якщо позначити

$u(0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$, тоді

$u(t,x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_1(x + at\sin\theta\cos\varphi, y + at\sin\theta\sin\varphi,\ z +$

$+atcos\theta)\, sin\theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_1(x + at\sin\theta\cos\varphi, y +$

$+at\sin\theta\sin\varphi,\ z + atcos\theta)\, sin\theta d\theta d\varphi), \quad dim = 3;$

$u(t,x,y) =$

$\frac{1}{2\pi a}\iint_{k_{at}(x,y)} \frac{u_1(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{k_{at}(x,y)} \frac{u_1(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} d\xi\, d\eta$,

де

$K_{at}(x,y) = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < a^2t^2\}$ — коло радіуса at із центром в точці $(x,y), \quad dim = 2.$

3. ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Розв’язати задачу Діріхлє в крузі:

$$\Delta u(x,y) = 0, x^2 + y^2 < R^2; \quad u\big|_{x^2+y^2=R^2} = g(x,y)\ .$$

1. $g(x,y) = x + xy.$
2. $g(x,y) = 4y^3 + 1.$
3. $g(x,y) = 4xy^2.$
4. $g(x,y) = 2x^2 - x - y.$
5. $g(x,y) = 2x^2 + 2y.$
6. $g(x,y) = x^2 - 2y^2.$
7. $g(x,y) = R^2y^2 + Rxy.$
8. $g(x,y) = x^3 + y^3.$
9. $g(x,y) = y + 2xy.$
10. $g(x,y) = x^2 - y^2.$

11. $g(x,y) = x^2 + 2y^2$.
12. $g(x,y) = y^2 - xy$.
13. $g(x,y) = 2x^2 - x + y$.
14. $g(x,y) = x + 5y + 6$.
15. $g(x,y) = x^2 + 3$.
16. $g(x,y) = y^2 + x + y$.
17. $g(x,y) = x + y^2$.
18. $g(x,y) = 1 + x + y$.
19. $g(x,y) = x^4 + y$.
20. $g(x,y) = 5 + x - y^2$.
21. $g(x,y) = y^2 + xy$.
22. $g(x,y) = x^3 + y^2$.
23. $g(x,y) = x + 3y^3$.
24. $g(x,y) = y - 4x^4$.
25. $g(x,y) = x + y - y^2$.
26. $g(x,y) = y - x + 4y^3$.
27. $g(x,y) = xy - x^2y$.
28. $g(x,y) = x^3 - x^2y$.
29. $g(x,y) = 3x - y + 1$.
30. $g(x,y) = x^2 + x - y^2$.

Завдання 2. Розв’язати задачу Діріхлє зовні одиничного круга:

$$\Delta u(\rho,\varphi) = 0, \qquad \rho > 1;\ \ u(1,\varphi) = g(\varphi).$$

1. $g(\varphi) = sin^6\varphi + cos^6\varphi$.
2. $g(\varphi) = sin\varphi\ cos3\varphi$.
3. $g(\varphi) = cos\varphi\ sin3\varphi$.
4. $g(\varphi) = sin\varphi\ cos5\varphi$.
5. $g(\varphi) = sin\varphi + cos^2\varphi$.
6. $g(\varphi) = 2 + sin\varphi + cos3\varphi$.
7. $g(\varphi) = 2 + cos^2\varphi$.
8. $g(\varphi) = sin^2\varphi\ + 2cos^2\varphi$.
9. $g(\varphi) = sin^2\varphi + cos^3\varphi$
10. $g(\varphi) = sin^3\varphi\ + cos^2\varphi$.
11. $g(\varphi) = cos^2\varphi\ + cos^3\varphi$.
12. $g(\varphi) = sin^2\varphi\ + sin^3\varphi$.
13. $g(\varphi) = sin^4\varphi$.
14. $g(\varphi) = cos^4\varphi + sin\varphi$.
15. $g(\varphi) = cos^3\varphi - 1$.
16. $g(\varphi) = 2 + sin^3\varphi$.

17. $g(\varphi) = cos\varphi\ cos3\varphi$.
18. $g(\varphi) = sin\varphi\ + sin^3\varphi$.
19. $g(\varphi) = 1 + cos\varphi + cos^2\varphi$.
20. $g(\varphi) = 2sin^2\varphi - sin\varphi$.
21. $g(\varphi) = cos^2\varphi + cos^3\varphi$.
22. $g(\varphi) = cos\varphi\ cos2\varphi$.
23. $g(\varphi) = cos^2\varphi + 3sin^3\varphi$.
24. $g(\varphi) = cos\varphi - 2cos^2\boldsymbol{\varphi}$.
25. $g(\varphi) = cos^4\varphi + sin^4\varphi$.
26. $g(\varphi) = 1 - cos^2\varphi\ sin^2 2\varphi$.
27. $g(\varphi) = 2 - cos^2\varphi\ cos3\varphi$.
28. $g(\varphi) = cos^3\varphi\ sin\varphi$.
29. $g(\varphi) = 2sin^3\varphi + 4cos^2\varphi$.
30. $g(\varphi) = 1 - 2sin^2 3\varphi\ cos\varphi$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Діріхлє в кільці:

$$\Delta u(\rho,\varphi) = 0,\ 1 < \rho < 2;\ u(1,\varphi) = g_1(\varphi)\ , u(2,\varphi) = g_2(\varphi)\ .$$

1. $g_1(\varphi) = sin\varphi\ cos\varphi, g_2(\varphi) = 1$.
2. $g_1(\varphi) = 1 + sin\varphi, g_2(\varphi) = cos\varphi$.
3. $g_1(\varphi) = sin^2\varphi, g_2(\varphi) = 1 + cos^2\varphi$.
4. $g_1(\varphi) = cos^2\varphi, g_2(\varphi) = sin^2\varphi$.
5. $g_1(\varphi) = cos^2\varphi, g_2(\varphi) = 1$.
6. $g_1(\varphi) = sin\varphi, g_2(\varphi) = 1$.
7. $g_1(\varphi) = 2, g_2(\varphi) = 1 + sin\varphi$.
8. $g_1(\varphi) = cos\varphi, g_2(\varphi) = 1$.
9. $g_1(\varphi) = cos\varphi, g_2(\varphi) = sin\varphi$.
10. $g_1(\varphi) = sin\varphi, g_2(\varphi) = 1 + sin\varphi$.
11. $g_1(\varphi) = 1 + cos^2\varphi, g_2(\varphi) = sin^2\varphi$.
12. $g_1(\varphi) = sin^2\varphi, g_2(\varphi) = cos^2\varphi$.
13. $g_1(\varphi) = 1, g_2(\varphi) = cos^2\varphi$.
14. $g_1(\varphi) = 1, g_2(\varphi) = sin\varphi$.
15. $g_1(\varphi) = 1 + sin\varphi, g_2(\varphi) = 2$.
16. $g_1(\varphi) = sin\varphi, g_2(\varphi) = cos\varphi$.
17. $g_1(\varphi) = 1, g_2(\varphi) = cos\varphi$.
18. $g_1(\varphi) = sin\varphi\ cos2\varphi, g_2(\varphi) = 2$.
19. $g_1(\varphi) = 2sin^2\varphi, g_2(\varphi) = sin\varphi$.
20. $g_1(\varphi) = sin\varphi\ cos\varphi, g_2(\varphi) = 1$.
21. $g_1(\varphi) = 1, g_2(\varphi) = sin\varphi\ cos\varphi$.
22. $g_1(\varphi) = cos\varphi, g_2(\varphi) = 1 + sin\varphi$.

23. $g_1(\varphi) = 1 + sin\varphi, g_2(\varphi) = sin\varphi.$
24. $g_1(\varphi) = sin^2\varphi, g_2(\varphi) = 1 \quad + cos\varphi.$
25. $g_1(\varphi) = sin^3\varphi, g_2(\varphi) = 3.$
26. $g_1(\varphi) = sin2\varphi\ cos\varphi, g_2(\varphi) = sin^2\varphi.$
27. $g_1(\varphi) = sin\varphi, g_2(\varphi) = sin^2\varphi.$
28. $g_1(\varphi) = sin\varphi - cos\varphi, g_2(\varphi) = cos^2\varphi.$
29. $g_1(\varphi) = sin^4\varphi, g_2(\varphi) = sin^3\varphi.$
30. $g_1(\varphi) = sin\varphi\ cos5\varphi, g_2(\varphi) = sin^2\varphi.$

Завдання 4. Знайти значення параметрів, за яких задача Неймана в крузі

$$\Delta u(x,y) = 0, x^2 + y^2 < R^2; \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=R^2} = g(x,y)$$

є коректно поставленою та знайти розв’язок цієї задачі

1. $g(x,y) = xy + Ax^2 + By^2.$
2. $g(x,y) = x + Ax^2 + By^2.$
3. $g(x,y) = x^3 + Bxy + C.$
4. $g(x,y) = x^3 + By^2 + Cx.$
5. $g(x,y) = Ax^3 + By + C.$
6. $g(x,y) = Ax^3 + By^2 + C.$
7. $g(x,y) = Ax + By^3 + Cy.$
8. $g(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cx.$
9. $g(x,y) = x^2 - Ay^2 + B.$
10. $g(x,y) = 2xy - Ax^2 + B.$
11. $g(x,y) = y^3 - A.$
12. $g(x,y) = Ax^3 + By^2 + Cy.$
13. $g(x,y) = Ax^2 - By^2 + y.$
14. $g(x,y) = Ay^2 - B.$
15. $g(x,y) = 2x^2 + A.$
16. $g(x,y) = y^3 + Bx^2 + Cy.$
17. $g(x,y) = Ay^2 - Bx^2 + x.$
18. $g(x,y) = Ay^3 + Bx^2 + Cx.$
19. $g(x,y) = Ax + y - By^2.$
20. $g(x,y) = Ay + Bx^3 + Cx.$
21. $g(x,y) = 2xy - Ay^2 + B.$
22. $g(x,y) = Ay^3 + Bx + C.$
23. $g(x,y) = y^2 - Ax^2 + B.$
24. $g(x,y) = y^2 + Ax^2 + By.$

25. $g(x,y) = Ax^4 + By$.
26. $g(x,y) = Axy^2 + x$.
27. $g(x,y) = Ay^3 + Bx^2 + C$.
28. $g(x,y) = Ax^2 - By$.
29. $g(x,y) = xy + Ay^3$.
30. $g(x,y) = x^2 - A$.

Завдання 5. Знайти розв'язок $u(t,x)$ задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), t > 0, x \in R, u(0,x) = \varphi(x)$$

1. $a^2 = 1, \varphi(x) = exp\{-x^2 + x\}, f(t,x) = x(sint)^3$.
2. $a^2 = 2,\ \varphi(x) = exp\{-x^2\},\ f(t,x) = sinxcos4x$.
3. $a^2 = 3,\ \varphi(x) = exp\{-2x^2\},\ f(t,x) = 3tx^2 - 2cosx$.
4. $a^2 = 4,\ \varphi(x) = exp\{-2x^2 + x\},\ f(t,x) = 4\ (sin6x)^2$.
5. $a^2 = 5, \varphi(x) = exp\{-2x^2 - x\}, f(t,x) = 4\sqrt{t}x - cos2x$.
6. $a^2 = 6,\ \varphi(x) = exp\{-x^2 - x\},\ f(t,x) = 6x^2 + sin7x$.
7. $a^2 = 7,\ \varphi(x) = exp\{-2x^2 + 2x\},\ f(t,x) = xcos2t - x^2$.
8. $a^2 = 8,\ \varphi(x) = exp\{-3x^2\},\ f(t,x) = 4tx^2 - sin2x$.
9. $a^2 = 9, \varphi(x) = exp\{-3x^2 + x\}, f(t,x) = \sqrt{t}x^2$.
10. $a^2 = 10,\ \varphi(x) = exp\{-2x^2 - 2x\},\ f(t,x) = 6(cosx)^2$.
11. $a^2 = 11,\ \varphi(x) = exp\{-3x^2 - x\},\ f(t,x) = t^3x^2$.
12. $a^2 = 12,\ \varphi(x) = exp\{-4x^2\},\ f(t,x) = 5tx^2 - 2sinx$.
13. $a^2 = 13, \varphi(x) = exp\{-3x^2 + 2x\}, f(t,x) = xcost + sin4x$.
14. $a^2 = 14,\ \varphi(x) = exp\{-4x^2 + x\},\ f(t,x) = 5t^2x^2$.
15. $a^2 = 15,\ \varphi(x) = exp\{-3x^2 - 2x\},\ f(t,x) = 3x^2 - 2cosx$.
16. $a^2 = 16,\ \varphi(x) = exp\{-4x^2 - 2x\},\ f(t,x) = 4(cos5x)^2$.
17. $a^2 = 15, \varphi(x) = exp\{-x^2 + 2x\}, f(t,x) = 2xe^{-t} + sin3x$.
18. $a^2 = 14,\ \varphi(x) = exp\{-3x^2 + 3x\},\ f(t,x) = xcos3t + 2x^2$.
19. $a^2 = 13,\ \varphi(x) = exp\{-2x^2 + 4x\},\ f(t,x) = cosx - e^{-3t}x$.
20. $a^2 = 12,\ \varphi(x) = exp\{-x^2 - 2x\},\ f(t,x) = 2(cos4x)^2$.
21. $a^2 = 11, \varphi(x) = exp\{-3x^2 - 3x\}, f(t,x) = xsin3t + cos2x$..
22. $a^2 = 10,\ \varphi(x) = exp\{-2x^2 - 4x\},\ f(t,x) = x^2 + 3sin2x$.
23. $a^2 = 9,\ \varphi(x) = exp\{-x^2 + 4x\},\ f(t,x) = (sin5x)^2$.
24. $a^2 = 8,\ \varphi(x) = exp\{-x^2 - 4x\},\ f(t,x) = 2tx - 7sinx$.
25. $a^2 = 7, \varphi(x) = exp\{-4x^2 + 2x\}, f(t,x) = 8t^2x^2$.
26. $a^2 = 6,\ \varphi(x) = exp\{-4x^2 - x\},\ f(t,x) = 4sin2xsin3x$.
27. $a^2 = 5,\ \varphi(x) = exp\{-3x^2 - 6x\},\ f(t,x) = 2cosxcos2x$.
28. $a^2 = 4,\ \varphi(x) = exp\{-3x^2 + 6x\},\ f(t,x) = xsin4t + 3x^2$.

29. $a^2 = 3, \varphi(x) = exp\{-4x^2 - 6x\}, f(t,x) = (cos3x)^2$.
30. $a^2 = 2,\ \varphi(x) = exp\{-4x^2 + 8x\},\ f(t,x) = sin2xcos3x$.

Завдання 6. Розв’язати задачу Діріхлє за допомогою функції Гріна або методом поділу змінних.

1. $\Delta u(x,y) = 0,\ y > 0;\ \ u(x,0) = cos\,x - 2sin3x$.
2. $\Delta u(x,y,z) = 0,\ z > 0;\ \ u(x,y,0) = (x^2 + 4x + y^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} - 4cosxsin2y$.
3. $\Delta u(x,y) = 0,\ y > 0;\ u(x,0) = \begin{cases} 1, x > 1 \\ 0, x \le 1 \end{cases}$
4. $\Delta u(x,y,z) = e^{-z},\ z > 0;\ u(x,y,0) = 0$.
5. $\Delta u(x,y) = 0, x > 0,\ y > 0; u(x,0) = e^{-3x} + 2sinx, u(0,y) = cos3y$.
6. $\Delta u(x,y,z) = 0,\ z > 0;\ \ u(x,y,0) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$
7. $\Delta u(x,y) = 0,\ x > 0,\ y > 0;\ u(0,y) = 0,\ u(x,0) = 1$.
8. $\Delta u(x,y,z) = 0,\ z > 0;\ u(x,y,0) = cos(x + 4y) + cos(x - 4y)$.
9. $\Delta u(x,y) = 0,\ x > 0,\ y > 0;\ \ u(x,0) = 1;\ \ u(0,y) = 2$.
10. $\Delta u(x,y,z) = e^{-z} sinxcosy,\ z > 0;\ u(x,y,0) = 0$.
11. $\Delta u(x,y) = 0,\ x > 0,\ y > 0;\quad u(0,y) = siny;\ \ u(x,0) = sinx$.
12. $\Delta u(x,y,z) = 0, z > 0; u(x,y,0) = \begin{cases} 0, y > 0 \\ 1, y \le 0 \end{cases}$.
13. $\Delta u(x,y) = 0, x > 0, y > 0; u(x,0) = \begin{cases} 1, x > 1 \\ 0, x \le 1 \end{cases}; u(0,y) = 0$.
14. $\Delta u(x,y,z) = 0, z > 0; u(x,y,0) = 2(x^2 + 6x + y^2 + 13)^{-\frac{1}{2}} + sinxcos4y$.
15. $\Delta u(x,y) = 0,\ 0 < y < \pi;\ u(x,0) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}; u(x,\pi) = 0$.
16. $\Delta u(x,y,z) = 2(x^2 + y^2 + (z+1)^2)^{-2}, z > 0;$
$$u(x,y,0) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}.$$
17. $\Delta u(x,y) = 0,\ 0 < y < \pi; u(x,0) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases};\ u(x,\pi) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$.

18. $\Delta u(x,y) = 0,\ 0 < x < \pi;$
$u(0,y) = \begin{bmatrix} 0, y > 0 \\ 2, y \leq 0 \end{bmatrix};\ u(\pi,y) = 0.$

19. $\Delta u(x,y) = 0, 0 < y < \pi;$
$u(x,0) = \begin{bmatrix} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{bmatrix};\ u(x,\pi) = \begin{bmatrix} -1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{bmatrix}.$

20. $\Delta u(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ x^2 + y^2 + z^2 < 1;$
$u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 2.$

21. $\Delta u(x,y) = 0,\ 0 < y < \pi;\quad u(x,0) = cosx, u(x,\pi) = 0.$

22. $\Delta u(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}, x^2 + y^2 + z^2 < 1;$
$u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 3.$

23. $\Delta u(x,y) = 0, 0 < y < \pi;$
$u(x,0) = \begin{bmatrix} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{bmatrix};\ u(x,\pi) = \begin{bmatrix} 0, x > 0 \\ 1, x \leq 0 \end{bmatrix}.$

24. $\Delta u(x,y,z) = 0, z > 0;$
$u(x,y,0) = (x^2 + 4y + y^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} + sinxsiny.$

25. $\Delta u(x,y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 1;\qquad u|_{x^2+y^2=1} = 2.$

26. $\Delta u(x,y,z) = 0\ , z > 0;\quad u(x,y,0) = (x^2 + y^2 + 4x + 6y + 14)^{-\frac{1}{2}}.$

27. $\Delta u(x,y) = 0, x^2 + y^2 < 1;\qquad u|_{x^2+y^2=1} = ln(2x + 4y + 6).$

28. $\Delta u(x,y,z) = 0, y > 0, z > 0;$
$u(x,0,z) = 0; u(x,y,0) = \begin{bmatrix} 1, x > 0 \\ -1, x \leq 0 \end{bmatrix}.$

29. $\Delta u(x,y) = 0, x > 0, 0 < y < \pi.\ u(x,0) = sinx; u(x,\pi) = 0; u(0,y) = 0.$

30. $\Delta u(x,y,z) = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0;$
$u|_{x^2+y^2+z^2=1, z>0} = 1 + y^2 - 4z^2; u|_{x^2+y^2+z^2<1, z=0} = x^2 + y^2.$

Завдання 7. Знайти розв'язок $u(t,x)$ початково-крайової задачі для рівняння коливань

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, x > 0,$$

на півосі, якщо задані початкові умови $u(0,x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$ та нульова крайова умова в точці $x = 0$.

1. $u(0,x) = x^3 - x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = e^x - 1, u(t,0) = 0.$
2. $u(0,x) = 3sin2x - 6x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = cos2x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
3. $u(0,x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2} - 1, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, u(t,0) = 0.$
4. $u(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 2x + 2e^{-x}, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
5. $u(0,x) = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = e^{\frac{x}{2}} - 1, u(t,0) = 0.$
6. $u(0,x) = x^2 + 1, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = cos\, x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
7. $u(0,x) = \sin x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0 e^{-x} - v_0, u(t,0) = 0.$
8. $u(0,x) = x^2 + 1, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = cos\, 2x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
9. $u(0,x) = \sin x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = cos\, x - 1, u(t,0) = 0.$
10. $u(0,x) = x^3, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 + x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
11. $u(0,x) = x(2 - x^2), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = e^{-x} - 1, u(t,0) = 0.$
12. $u(0,x) = xsin\, x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0 x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
13. $u(0,x) = x^3, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = sinx, u(t,0) = 0.$
14. $u(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = e^x - x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
15. $u(0,x) = 2e^x - x^2 - 2, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \omega x, u(t,0) = 0.$
16. $u(0,x) = cos^2 x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = sin^2 x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
17. $u(0,x) = x(x^2 + 2), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = e^x - 1, u(t,0) = 0.$
18. $u(0,x) = cosx$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \omega x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
19. $u(0,x) = x^3 e^x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \omega x, u(t,0) = 0.$
20. $u(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = cos\, x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
21. $u(0,x) = e^{-x} + x - 1 - \frac{x^2}{2}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x^3, u(t,0) = 0.$
22. $u(0,x) = (x + 1)e^x - 2x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 2x^2 + 1, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$

23. $u(0,x) = 2sinx,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sin x,\ u(t,0) = 0.$
24. $u(0,x) = \frac{1}{1+x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \cos x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
25. $u(0,x) = arctg\, x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 2x,\ u(t,0) = 0.$
26. $u(0,x) = 1 + x^2, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
27. $u(0,x) = \frac{x}{1+x^2},\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = e^{-x} - 1,\ u(t,0) = 0.$
28. $u(0,x) = \cos x\ , \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$
29. $u(0,x) = x\cos x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \frac{x}{1+x^2},\ u(t,0) = 0.$
30. $u(0,x) = \frac{-x^2}{2}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x - \sin x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$

Завдання 8. Знайти розв’язок $u(t,x,y)$ задачі Коші для двовимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, t > 0, (x,y) \in R^2,$$

з наступними початковими умовами:

1. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (x+y)^2.$
2. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (x-y)^2.$
3. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (2x+y)^2.$
4. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (x+2y)^2.$
5. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (2x-y)^2.$
6. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (x-2y)^2.$
7. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (3x+y)^2.$
8. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (x-3y)^2.$
9. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (2x+3y)^2.$
10. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (2x-3y)^2.$
11. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (3x+4y)^2.$
12. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (3x-4y)^2.$
13. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (5x+6y)^2.$
14. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (5x-6y)^2.$
15. $u(0,x,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (6x+7y)^2.$

16. $u(0,x,y) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = (6x - 7y)^2.$
17. $u(0,x,y) = 3x^2 + 4y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
18. $u(0,x,y) = 3x^2 - 4y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
19. $u(0,x,y) = 4x^2 + 5y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
20. $u(0,x,y) = 4x^2 - 5y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
21. $u(0,x,y) = 5x^2 + 6y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
22. $u(0,x,y) = 5x^2 - 6y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
23. $u(0,x,y) = 6x^2 + 7y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
24. $u(0,x,y) = 6x^2 - 7y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
25. $u(0,x,y) = x^2 + y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
26. $u(0,x,y) = x^2 - y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
27. $u(0,x,y) = 2x^2 + y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
28. $u(0,x,y) = x^2 + 2y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
29. $u(0,x,y) = y^2 - x^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$
30. $u(0,x,y) = 3x^2 + 2y^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = 0.$

Завдання 9. Знайти розв’язок $u(t,x,y,z)$ задачі Коші для тривимірного рівняння коливань

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \ \ , t > 0, (x,y,z) \in R^3.$$

з наступними початковими умовами:

1. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (x - y + z)^2, a^2 = 1.$
2. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (x - 2y + z)^2, a^2 = 2.$
3. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (x + y - z)^2, a^2 = 3.$
4. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (x + y - 2z)^2, a^2 = 4.$
5. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (2x + y + z)^2, a^2 = 5.$
6. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (2x + y + 2z)^2, a^2 = 6.$
7. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (x + y + 3z)^2, a^2 = 7.$
8. $u(0,x,y,z) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (x + 2y + 3z)^2, a^2 = 8.$

9. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (2x + 3y + 4z)^2, \ a^2 = 9.$
10. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (3x + 2y + 4z)^2, a^2 = 10.$
11. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (2x + 4y + 3z)^2, a^2 = 11.$
12. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (4x + 2y + 3z)^2, a^2 = 12.$
13. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (4x + 3y + 2z)^2, a^2 = 13.$
14. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (3x + 4y + 2z)^2, a^2 = 14.$
15. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (5x + 4y + 3z)^2, a^2 = 15.$
16. $u(0,x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = (3x + 4y + 5z)^2, a^2 = 16.$
17. $u(0,x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 15.$
18. $u(0,x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 14.$
19. $u(0,x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 13.$
20. $u(0,x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 12.$
21. $u(0,x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 11.$
22. $u(0,x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 10.$
23. $u(0,x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 9.$
24. $u(0,x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 8.$
25. $u(0,x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 7.$
26. $u(0,x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 6.$
27. $u(0,x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 5.$
28. $u(0,x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 4.$
29. $u(0,x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 3.$
30. $u(0,x,y,z) = 4x^2 + 5y^2 + 3z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0, a^2 = 2.$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 463 с.

2.Сборник задач по уравнениям математической физики / Под общ.ред. В.С.Владимирова. – М.:Наука, 1974. – 271 с.

3.Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики - К.:Либідь, 2006, -363с.

4.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

5.Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: М.: Изд-во МГТУ, 2002. -368 с.

6.Будак Б.М., Самарський А.А., Тихонов А.М. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 372 с.

7.Рівняння математичної фізики: [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ.спеціальності 124 «системний аналіз» /В.Г.Бондаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського,—Електронні текстові данні Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.—100 с.